Cuadernos de Investigaciones

N° 8

Elección colectiva y principios morales

Hugo Ricardo Zuleta

Instituto de Investigaciones Jurídicas y Sociales
"Ambrosio L. Gioja"

1988

Facultad de Derecho y Ciencias Sociales. U.B.A.

ÍNDICE

I. INTRODUCCION

La teoría de la elección colectiva, o social, se ocupa de las' condiciones bajo las cuales se puede encontrar alguna regla o procedimiento que permita a una colectividad arribar a decisiones que, de alguna manera, reflejen las preferencias de sus miembros.

En su forma actual reconoce su origen en los economistas de la llamada "economía de bienestar", interesados en sustituir el mecanismo del mercado por una política planificada de distribución de bienes y servicios, pero que, al igual que el mercado, dependa de las preferencias de los interesados.

Sin perjuicio de este dato histórico, el problema de reflejar las preferencias individuales en una política de distribución de bienes y servicios es estructuralmente análogo al problema más general de la elección democrática, entendida como el de reflejar las preferencias individuales en una decisión política con respecto a problemas de distinta índole, no exclusivamente económicos.

También es estructuralmente análogo al problema de ética normativa de fundar juicios del tipo "la situación x es más justa que la situación y", en tanto se considere que estos han de depender de alguna manera de juicios del tipo "la situación x es mejor para el individuo i que la situación y"

Por ello, la teoría de la elección social ha trascendido las fronteras de la economía y se puede pensar como una teoría general acerca de algunos aspectos de cualquier juicio normativo que se base de algún modo en las preferencias o necesidades de varios individuos.

Los resultados principales de ese estudio han sido hasta ahora más bien negativos, ya que mostraron que si imponemos algunas condiciones en apariencia razonables a la regla de formación de decisiones sociales a partir de preferencias individuales, tal regla no puede existir.

En este trabajo se expondrá en primer lugar el problema clásico, tal corno queda planteado con el *Teorema General de Imposibilidad* de Arrow (1951)[1], para luego mostrar los resultados de una de las líneas de investigación que se han desarrollado en los últimos años,

[1] Arrow, Kenneth j: *Social choice and individual values.* New Haven and London, 1963 (1a. ed. 1951)

II. PREFERENCIAS INDIVIDUALES

Las preferencias individuales entre alternativas pueden ser pensadas como disposiciones para elegir una, frente a un par de alternativas. En otras palabras, el enunciado "el estado x es preferido al estado y por el individuo i "se puede interpretar como el enunciado hipotético "el estado x sería elegido por el individuo i si los únicos estados disponibles fueran x e y".

Es posible pensar que, enfrentado a un par de estados, el individuo no eligiera ninguno. Dada la definición operativa que hemos propuesto para la noción de preferencia, en este supuesto deberíamos decir que los dos estados no son comparables por la relación de preferencia. Pero podemos definir una relación más débil, que podríamos denominar "preferencia débil": el enunciado "x es preferido débilmente a y por el individuo i" puede ser interpretado como el enunciado hipotético: "si los únicos estados disponibles fueran x e y, el individuo i o bien elegiría a x " o bien no elegiría a ninguno de los dos".

La relación de preferencia débil es una relación completa (o conexa), pues frente a todo par de alternativas x, y, o bien x es débilmente preferido a y, o bien y es débilmente preferido a x. Además tiene las propiedades de ser reflexiva (toda alternativa es débilmente preferida a sí misma) y transitiva (si x es débilmente preferido a y e y es débilmente preferido a z, entonces x es débilmente preferido a z). Por consiguiente, es un orden débil.

La relación de preferencia estricta es transitiva, asimétrica (si x es estrictamente preferido a y, entonces y no es estrictamente preferido a x) y no es completa. Es un orden parcial estricto.

Podemos definir una relación de indiferencia en términos de preferencia débil: "x es indiferente a y" significa que x es débilmente preferido a y e y es débilmente preferido a x.

La preferencia estricta también puede ser definida en términos de preferencia débil, ya que " x es estrictamente preferida a y " es equivalente a "y no es débilmente preferida a x".

Usaremos la siguiente notación:

Los signos de la lógica proposicional serán empleados con su sentido usual.

"$x R_i y$" significa que x es débilmente preferido a y por el individuo i.

"$x R y$" significa que x es débilmente preferido a y por la sociedad.

"$x P_i y$" y "$x P y$" se usan para indicar preferencia estricta en favor de x contra y por el individuo $_i$ y por la sociedad respectivamente.

"$x I_i y$" y "$x I y$" representan indiferencia entre x e y, individual y social respectivamente.

Como es obvio, tanto "$x P y$" como "$x I y$"implican "$x R y$", y lo mismo vale, *mutatis mutandis,* para la preferencia e indiferencia individuales.

En ocasiones la expresión "preferencias" se usará intencionalmente de manera ambigua, y deberá entenderse en ambos sentidos.

III. REGLA DE MAYORIA

Supongamos que a una comunidad se le da a elegir entre dos alternativas; por ejemplo, candidatos para un cargo público.

Deseamos encontrar un procedimiento que determine la preferencia social frente a cualquier conjunto de preferencias individuales, ya que no sabemos cómo van a votar los miembros de la comunidad. Por ello, deseamos que el procedimiento cumpla con las siguientes:

Condición A: DOMINIO NO RESTRINGIDO. El procedimiento debe dar una preferencia social para cualquier conjunto de preferencias individuales lógicamente posible.

También pediremos que todos los candidatos sean tratados de igual manera, sin discriminar entre ellos. Por ello imponemos la

Condición B: NEUTRALIDAD. Si dada una cierta configuración de preferencias individuales el procedimiento de decisión indica que x es socialmente preferido a y, y luego todos los votantes revierten sus preferencias, ahora el resultado debe ser que y es socialmente preferido a x.

También queremos que los votantes sean tratados de igual manera. Por eso imponemos la

Condición C: ANONIMIDAD La preferencia social no puede cambiar si los individuos intercambian sus preferencias.

Pedimos que el procedimiento, al decidir entre *dos* alternativas, no tome en cuenta las preferencias de los votantes con respecto a otras alternativas distintas de esas dos. Esta es la

Condición D: INDEPENDENCIA DE ALTERNATIVAS IRRELEVANTES. La preferencia social con respecto a un par de alternativas x, y, no debe ser alterada por cambios en las preferencias individuales con respecto a otros pares distintos del formado por x, y.

Un aspecto importante de esta condición es la ordinalidad: lo único que toma en cuenta el procedimiento de decisión son las meras preferencias con respecto al par en cuestión, sin importar las distintas intensidades que tales preferencias puedan tener. Esta característica ha sido blanco de numerosas críticas, y será objeto de especial consideración más adelante.

Finalmente, se pide que el procedimiento refleje positivamente las preferencias de los votantes:

Condición E: RESPUESTA POSITIVA. Si, dado un conjunto de preferencias individuales, el procedimiento de elección determina que x es débilmente preferido a y, si uno de los votantes cambia su voto en favor de x (pasando de indiferencia a preferencia estricta por x, o de preferencia estricta por y a indiferencia) mientras que todos los demás votos permanecen igual, entonces la decisión social ha de ser que x es estrictamente preferido a y.

Un conocido teorema de Kenneth May (1952) demuestra que el único procedimiento de elección colectiva que puede satisfacer las condiciones propuestas es la *regla de mayoría*. Se entiende por tal la regla que determina que para todo par de alternativas x, y, la decisión social es x R y si y sólo si el número de los que prefieren x a y es mayor o igual al número de los que prefieren y a x.

En efecto, la condición D implica que la única información que podernos tomar en cuenta es la lista de votantes que prefieren x a y y la lista de los que prefieren y a x. La condición C asegura que lo único que tengamos en cuenta es el número de los que prefieren x a y y de los que prefieren y a x, ignorando los nombres de los votantes. La condición E nos dice que si x fuera electo cuando tiene un determinado número de votos a favor, también lo será cuando tiene cualquier número mayor que ese; y lo mismo vale para y. Ahora bien, supongamos que la mayoría prefiere a x pero el procedimiento nos dice que y es el ganador. Si todos los votantes revierten sus votos, la condición B exigirá que ahora x sea el ganador. Sin embargo, y tiene ahora más votos que antes, y esto viola la condición E. En consecuencia, el procedimiento debe ser tal que elija a x cuando éste tiene la mayoría de votos a favor; y lo mismo vale para y.

La regla de mayoría es un procedimiento de elección social satisfactorio cuando hay dos alternativas, pero no cuando hay más, porque viola la transitividad de R.

Por otra parte, aún cuando no se concibiera a R como una relación de orden, y se prescindiera de la transitividad, un requisito mínimo de racionalidad es que sea una relación acíclica. Esta es una propiedad más débil que la transitividad. Lo que exige es que, si x es preferido estrictamente a y, e y es preferido estrictamente a z, que z no sea preferido estrictamente a x.

La regla de mayoría tampoco satisface este requisito mínimo, ya que da lugar a mayorías cíclicas

Supongamos que hay tres votantes: i, j, k, y tres candidatos: x, y, z, y que dan las siguientes relaciones de preferencia:

$x \; P_i \; y \;\; \& \;\; y \; P_i \; z$

$y \; P_i \; z \;\; \& \;\; z \; P_i \; x$

$z \; P_K \; x \;\; \& \;\; x \; P_K \; y$

Como se ve, dos de los tres votantes prefieren x a y, dos prefieren y a z y dos prefieren z a x, Si aplicamos la regla de mayoría, diremos que x es socialmente preferido a y, y a z y z a x. Como se ve, la preferencia social resulta cíclica.

IV. TEOREMA GENERAL DE IMPOSIBILIDAD

El resultado anterior muestra que un procedimiento de decisión social, entendido como una función cuyo dominio son conjuntos de ordenamientos individuales de alternativas y su contradominio son ordenamientos sociales de las mismas alternativas, no puede satisfacer las condiciones de independencia de alternativas irrelevantes, respuesta positiva, neutralidad y anonimidad.

En efecto, se vio en primer lugar que el único procedimiento que puede satisfacer estas condiciones es la regla de mayoría, y luego se vio que esta regla no puede determinar siempre un orden. Por ende, ningún procedimiento que satisfaga esas condiciones puede determinar siempre un orden.

El resultado que veremos ahora es mucho más fuerte, porque se obtiene con un importante relajamiento de algunas de las condiciones impuestas anteriormente.

La condición de neutralidad exigía que todas las alternativas fueran tratadas en pie de igualdad. Ahora no se pide tanto. Se admite que el procedimiento pueda discriminar de algún modo entre alternativas, con tal que no lo haga hasta el punto de que algunas queden proscriptas, es decir, que no puedan resultar socialmente elegidas cualquiera sea la proporción de votantes que las prefieran.

También la condición de que el procedimiento de elección refleje positivamente las preferencias de los votantes se reduce a un mínimo: que por lo menos refleje positivamente las preferencias unánimes.

Para satisfacer los requisitos anteriores se impone la

Condición F: PRINCIPIO DE PARETO DEBIL. Si todos los votantes prefieren estrictamente una alternativa $\underline{x}$ a otra alternativa $\underline{y}$, la sociedad también debe preferir $\underline{x}$ a $\underline{y}$.

Esto garantiza que toda alternativa tenga por lo menos una posibilidad de ser elegida: cuando es preferida estrictamente por todos los miembros de la comunidad. Al mismo tiempo garantiza la respuesta positiva en el caso límite de la unanimidad.

Aun en esta forma mínima del principio de Pareto, la condición no está totalmente libre de posibles cuestionamientos: En caso de que todos los miembros de la comunidad prefieran cosas malas para ellos (física, económica, moralmente, etc.); ¿se debe permitir que se perjudiquen? El principio de Pareto nos dice que sí. Por ello, conviene dejar aclarado un presupuesto ético de la teoría, reflejado en su forma mínima en el principio de Pareto: se supone que todos los individuos tienen derecho a elegir aun aquello que los perjudica, y el procedimiento de decisión social debe tomar en cuenta todas las preferencias, aun aquéllas que sean -en algún sentido- perjudiciales para los individuos o la sociedad. En pocas palabras, la teoría de la elección social tiene una base individualista, o no paternalista. Por otra parte, esto es obvio, ya que si se supusiera el paternalismo no habría problema de elección social, ya que las decisiones sociales ya estarían decididas de antemano, cualesquiera fueran las preferencias de los individuos.

También se debilitará la condición de anonimidad, que es cambiada por

Condición G: NO DICTADURA. Ya no se exige que todos los votantes sean tratados en pie de igualdad, sino que por lo menos no sean tratados de manera tan desigual que haya uno cuyas preferencias determinen completamente las preferencias sociales con respecto a todos los pares de alternativas.

Si se mantienen las condiciones de independencia de alternativas irrelevantes y dominio no restringido, se puede demostrar que el resultado de imposibilidad que obtuvimos en el punto anterior también se mantiene, pese al gran debilitamiento de las otras condiciones.

Esto es lo que muestra un conocido teorema de Kenneth Arrow, cuya primera versión apareció en 1951 y la definitiva en 1963, el *teorema general de imposibilidad*. Lo veremos brevemente a continuación.

Comenzaremos por definir las nociones de "conjunto casi-decisivo" y "conjunto decisivo":

DEFINICION 1: Dado cualquier par de alternativas x, y, un conjunto de individuos V es *casi- decisivo* en favor de x contra y si y sólo si la decisión social es x P y siempre que, para todo individuo i perteneciente a V, $x \; P_i \; y$, y para todo individuo i no perteneciente a V, $y \; P_i \; x$.

Utilizaremos la notación "$D_V(x,y)$" para expresar que el conjunto V es casi-decisivo en favor de x contra y.

DEFINICION 2: Dado un par de alternativas x, y, un conjunto de individuos V es *decisivo* en favor de x contra y si y sólo si la decisión social es x P y siempre que, para todo i perteneciente a V, $x \; P_i \; y$.

Utilizaremos "$\square_V(x,y)$" para expresar que V es decisivo en favor de x contra y.

Es fácil advertir que $\square_V(x,y)$ implica $D_V(x,y)$. En cambio, la conversa no se sigue de las definiciones.

LEMA 1: Si un individuo es casi-decisivo para un par ordenado de alternativas x, y, entonces ese individuo es decisivo para todos los pares ordenados de alternativas y, por consiguiente, es el dictador.

Demostración: Sean x, y, dos alternativas pertenecientes al conjunto S, y sea a un individuo casi-decisivo en favor de x contra y. Sea z otra alternativa y supongamos:

$x \; P_a \; y$ & $y \; P_a \; z$

$x \; P_i \; y$ & $y \; P_i \; z$ para todo i distinto de a

Dado que, por hipótesis, a es casi-decisivo en favor de x contra y, y que $x \; P_a \; y$ & $y \; P_i \; x$ para todo i distinto de a, la preferencia social será x P y.

Por otra parte, todos prefieren y a z. Por ello, en virtud del principio de Pareto la preferencia social será y P z.

Ahora bien, dado x P y & y P z, por la transitividad de la relación de preferencia obtenemos x P z.

Nótese que se ha llegado al último resultado sin hacer ningún supuesto acerca de los individuos distintos de a con respecto al par x, z. En cambio, si se ha supuesto que la preferencia del individuo a es $x \; P_a$ z, ya que esto es implicado por sus otras preferencias.

Desde luego, hemos supuesto $y \; P_i \; x$ & $y \; P_i \; z$. Pero la decisión social con respecto al par x, z, debe ser independiente de las preferencias individuales con respecto a otros pares de alternativas, de modo que si el procedimiento arroja este resultado cuando se da esa particular combinación de preferencias individuales con respecto a los otros pares de alternativas, debe dar el mismo resultado frente a cualquier otra configuración de preferencias individuales con respecto a las otras alternativas. De lo contrario se violaría la condición de independencia de alternativas irrelevantes.

Por ello, la decisión social debe ser x P z, siempre que $x \; P_a \; z$ con independencia de cuáles sean las preferencias de los demás individuos con respecto al par x, z. En consecuencia, a es decisivo en favor de x contra z.

Con esto se demuestra:

(1) $D_{\underline{a}}(\underline{x},\underline{y}) \rightarrow \square_{\underline{a}}(\underline{x}, \underline{z})$

Supongamos ahora

$\underline{z}\ P_{\underline{a}}\ \underline{x}\ \&\ \underline{x}\ P_{\underline{a}}\ \underline{y}$

$\underline{z}\ P_{\underline{i}}\ \underline{x}\ \&\ \underline{y}\ P_{\underline{i}}\ \underline{x}$ para todo i distinto de a

En virtud del principio de Pareto, la decisión social para el par x, z será $z\ P\ x$. Para el par x, y, la decisión social será $x\ P\ y$, por hipótesis. Por transitividad obtenemos $z\ P\ y$. Esto se ha obtenido con la sola suposición de $z\ P_{\underline{a}}\ y$, sin especificar nada con respecto a las preferencias de los demás individuos con relación al par z, y. Por ende, a es decisivo para z frente a y, con lo que queda demostrado:

(2) $D_{\underline{a}}(\underline{x},\underline{y}) \rightarrow \square_{\underline{a}}(\underline{z},\underline{y})$

Dado el resultado obtenido en (1) y lo que surge de las definiciones, en el sentido de que ser decisivo implica ser casi-decisivo, inferimos:

(3) $D_{\underline{a}}(\underline{x},\underline{y}) \rightarrow D_{\underline{a}}(\underline{x},\underline{z})$

Colocando en (2) z en el lugar de y, e y en el lugar de z, obtenemos:

(4) $D_{\underline{a}}(\underline{x},\underline{z}) \rightarrow \square_{\underline{a}}(\underline{y},\underline{z})$

De (3) y (4) se infiere:

(5) $D_{\underline{a}}(\underline{x},\underline{y}) \rightarrow \square_{\underline{a}}(\underline{y},\underline{z})$

Por definiciones (1) y (2) tenemos:

(6) $\square_{\underline{a}}(\underline{y},\underline{z}) \rightarrow D_{\underline{a}}(\underline{y},\underline{z})$

Sustituyendo en (1) x por y, y por z y z por x obtenemos:

(7) $D_{\underline{a}}(\underline{y},\underline{z}) \rightarrow \square_{\underline{a}}(\underline{y},\underline{x})$

De (5), (6) y (7) se infiere:

(8) $D_{\underline{a}}(\underline{x},\underline{y}) \rightarrow \square_{\underline{a}}(\underline{y},\underline{x})$

Por definición:

(9) $\square_{\underline{a}}(\underline{y},\underline{x}) \rightarrow D_{\underline{a}}(\underline{y},\underline{x})$

Intercambiando x e y en (2) tenemos:

(10) $D_{\underline{a}}(\underline{y},\underline{x}) \rightarrow \square_{\underline{a}}(\underline{z},\underline{x})$

Intercambiando x e y en (8) se obtiene:

(11) $D_{\underline{a}}(\underline{y},\underline{x}) \rightarrow \square_{\underline{a}}(\underline{x},\underline{y})$

De (8), (9) y (10):

(12) $D_{\underline{a}}(\underline{x},\underline{y}) \rightarrow \square_{\underline{a}}(\underline{z},\underline{x})$

De (8), (9) y (11):

(13) $D_{\underline{a}}(\underline{x},\underline{y}) \rightarrow \square_{\underline{a}}(\underline{x},\underline{y})$

Observando (1), (2), (5), (8), (12) y (13) se ve que el individuo a es decisivo para todos los pares ordenados de alternativas del conjunto x, y, z.

La conclusión se puede extender fácilmente a conjuntos de más de tres alternativas:

Sean u, v, dos alternativas cualesquiera del conjunto total de alternativas. Si u y v son las mismas que x e y, se aplica directamente la demostración anterior. Si u o v es idéntica a x o a y, por ejemplo u es idéntica a x pero v no es idéntica a y, se toma la terna u, y, v. Puesto que, por hipótesis, se cumple $D_{\underline{a}}(\underline{u}, \underline{y})$, se sigue por la demostración anterior –(2) y (5)– $\square_{\underline{a}}(\underline{v}, \underline{u})$ y $\square_{\underline{a}}(\underline{u}, \underline{v})$.

Si u, v, son ambas distintas de x, y, se toma primero la terna x, y, u, y se prueba $\square_{\underline{a}}(\underline{x}, \underline{u})$ –(1)–, que a su vez implica $D_{\underline{a}}(\underline{x}, \underline{u})$.

Ahora se toma la terna x, u, v. Puesto que se ha probado $D_a(x, u)$, se sigue $□_a(u, v)$ y $□_a(v, u)$.

Con esto se muestra que a es el dictador para cualquier conjunto de alternativas que contenga x e y.

El lema 1 muestra que un procedimiento de elección social que satisfaga las condiciones impuestas por Arrow no puede admitir que un individuo sea casi-decisivo para ningún par ordenado de alternativas, pues en ese caso ese individuo sería el dictador, violando la condición G.

Ahora supondremos que un procedimiento satisface tales condiciones, y veremos que ello lleva a contradicción.

Sea X un conjunto de por lo menos tres alternativas, x, y, z, en el cual n individuos introducen relaciones de preferencia.

El principio de Pareto débil asegura que para todo par ordenado de alternativas habrá por lo menos un conjunto decisivo (y por tanto casi- decisivo): el formado por la totalidad de los votantes. Comparemos todos los conjuntos que sean casi-decisivos para algún par ordenado de alternativas y elijamos el menor. Supongamos que éste es un conjunto casi-decisivo en favor de x contra y, y llamemos V a este conjunto.

Sea V_1, un subconjunto de V que tiene un solo miembro, y sea V_2 el conjunto formado por todos los restantes miembros de V. Finalmente, sea V_3 el conjunto de todos los votantes que no pertenecen a V (no es necesario suponer que V_3 no es vacío).

Supongamos que los votantes tienen las siguientes preferencias:
el miembro de V_1: $x P_i y$, $y P_i z$
los miembros de V_2: $z P_j x$, $x P_j y$
los miembros de V_3: $y P_k z$, $z P_k x$

Dado que V es casi decisivo en favor de x contra y y que todos sus miembros prefieren x a y, mientras que todos los demás prefieren y a x, la preferencia social debe ser x P y.

Consideremos ahora las alternativas y, z. El miembro de V_1 y los de V_3 prefieren y a z, mientras que los de V_2 prefieren z a y. Puesto que V es, por hipótesis, el conjunto casi-decisivo más pequeño, V_2 no puede ser casi-decisivo con respecto a ningún par ordenado de alternativas, ya que es más pequeño que V. Por ende la preferencia social debe ser y R z, ya que si fuera z P y V_2 sería casi-decisivo en favor de z contra y.

Ahora bien, de "x P y & y R z" se infiere "x P z". Pero el único votante que prefiere x a z es el miembro de V_1 mientras que todos los demás prefieren z a x. Por ende, el miembro de V_1, resulta ser casi-decisivo en favor de x contra z, con lo que se viola el supuesto inicial de que ningún individuo es casi-decisivo para ningún par ordenado. Se ve, entonces, que el supuesto de que el procedimiento de decisión social cumple con las condiciones A, D, F y G lleva a contradicción. Con ello se demuestra que ningún procedimiento de decisión social puede satisfacer las cuatro condiciones.[2]

[2] En la demostración del teorema de Arrow se ha seguido en SEN Amartya K. *Elección colectiva y bienestar social*. Madrid, 1976. Cap. 3+.

V. LA NOCION DE PRIORIDAD DE PREFERENCIA

Se ha visto que la condición de independencia de alternativas irrelevantes juega un papel esencial en la demostración del lema 1.

Como se vio, esta condición limita la información que se puede tener en cuenta a los fines de la elección social, restringiéndola a las preferencias individuales con respecto al par de alternativas de que se trate. Ello impide distinguir entre diferentes situaciones, obligándonos a admitir que si un individuo es decisivo para un par ordenado de alternativas cuando se da cierta configuración de preferencias individuales con respecto a otras alternativas, lo ha de ser siempre, cualesquiera sean las preferencias individuales con respecto a las otras alternativas.

Este tipo de restricción ha sido uno de los flancos de la teoría arrowsiana que más ataques recibió, ya que se ha sostenido que deja fuera información moralmente relevante para la decisión social, como podría ser, por ejemplo, la relativa importancia que tuviera la elección para distintos individuos.

Siguiendo una propuesta de Steven Stransnick,[3] veremos qué procedimiento de decisión social resulta cuando se cambia la naturaleza de la información admitida, manteniendo la condición A y las condiciones de imparcialidad fuertes B y C, que en el teorema de Arrow fueron debilitadas hasta su mínima expresión.

El principio de Pareto –condición F– se mantiene, y se agrega una generalización del mismo que veremos a continuación.

Hasta ahora se ha tomado como dado el conjunto de votantes. Pero supongamos que tenemos un procedimiento de decisión para cada conjunto de individuos. Parece razonable esperar que se cumplan ciertas condiciones de consistencia entre estos procedimientos. En realidad el principio de Pareto puede ser interpretado de este modo. Supongamos que todos los miembros de un conjunto de votantes prefieren $\underline{x}$ a $\underline{y}$. Entonces, también preferirán $\underline{x}$ a $\underline{y}$ todos los miembros de todos los subconjuntos del conjunto original. Si se aplica el principio de Pareto a cada uno de esos subconjuntos, la decisión social en cada uno será $\underline{x}$ P $\underline{y}$. En especial será esa la decisión social en todos los subconjuntos unitarios. Por otra parte, es obvio que cuando todos los subconjuntos unitarios prefieran $\underline{x}$ a $\underline{y}$, también lo harán todos los miembros del conjunto total y, por ende, esa será la decisión social. En consecuencia, el principio de Pareto puede ser interpretado como estableciendo que si todos los subconjuntos unitarios prefieren $\underline{x}$ a $\underline{y}$, entonces la decisión de toda la sociedad será $\underline{x}$ P $\underline{y}$.[4]

Los subconjuntos unitarios son una partición del conjunto total de votantes, entendiendo por "partición" cualquier división de un conjunto en subconjuntos mutuamente excluyentes y conjuntamente exhaustivos.

La condición siguiente extiende el principio, interpretado de la manera indicada, a todas las particiones del conjunto de votantes:

Condición H: PARETO DEBIL GENERALIZADO. Si para alguna partición del conjunto de votantes la regla de elección social determina $\underline{x}$ R $\underline{y}$ para todos los subconjuntos, entonces $\underline{x}$ R $\underline{y}$ es la preferencia social del conjunto total.

---

[3] STRASNICK, Steven. "The problem of social choice: Arrow to Rawls" en *Philosophy and Public Affairs,* 5 (3), 1976
_"Ordinality and the Spirit of the justified dictator" en *Social Research, 44 (4),* winter 1977.
_"Social choice and the derivation of Rawls's difference principle" en *The Journal of Philosophy,* LXXIII (4), feb. 1976

[4] ARROW, Kenneth. "Extended Sympathy and the Possibility of Social Choice" en *The American Economic Review, 67 (1), feb. 1977.*

En cuanto a la condición de independencia de alternativas irrelevantes, se redefinirá de una manera vacua:

Condición D': Para todo par de alternativas x y, la decisión social dependerá sólo de la información moralmente relevante concerniente a las preferencias individuales entre esas alternativas.

Como es obvio, el significado de esta condición dependerá de los que se entienda por "información moralmente relevante".

Se puede mostrar que si la condición D' se interpreta entendiendo por "información moralmente relevante" la misma información que admite la condición D, se obtiene también un teorema de imposibilidad.

Arrow mostró que en el caso de una sociedad formada por dos individuos con preferencias opuestas con respecto a un par de alternativas, bajo sus condiciones la sociedad debía ser indiferente entre esas alternativas. Eso es así porque, si la decisión social fuera que una de las alternativas es preferida a la otra, el individuo cuya preferencia coincide con la social sería el dictador.

Con las condiciones que tenernos ahora se puede mostrar también que la decisión social debe ser indiferencia. Porque, supongamos que en el caso

(1) $\underline{x}\ P_1\ \underline{y}$, $\underline{y}\ P_2\ \underline{x}$

la decisión social fuera $\underline{x}$ R $\underline{y}$. Dada la condición C, en el caso (1´) en que los individuos intercambian sus preferencias:

(1') $\underline{x}\ P_2\ \underline{y}$, $\underline{y}\ P_1\ \underline{x}$

la decisión social debe seguir siendo $\underline{x}$ R $\underline{y}$. Si intercambiamos ahora los nombres de las alternativas:

(1") $\underline{y}\ P_2\ \underline{x}$, $\underline{x}\ P_1\ \underline{y}$

la condición B nos dice que el cambio se debe reflejar directamente en la decisión social, de modo que ahora la decisión debe ser $\underline{y}$ R $\underline{x}$.

Pero el caso (1") es igual al (1), de modo que hemos obtenido para el mismo caso $\underline{x}$ R $\underline{y}$ & $\underline{y}$ R $\underline{x}$, es decir $\underline{x}$ I $\underline{y}$.

Supongamos que en el caso (1) la decisión social hubiera sido $\underline{x}$ P $\underline{y}$. En el caso (1") debería ser $\underline{y}$ P $\underline{x}$. Pero, puesto que (1) y (1") son el mismo caso, se obtiene $\underline{x}$ P $\underline{y}$. & $\underline{y}$ P $\underline{x}$, lo cual es una contradicción.

Veamos ahora los siguientes casos:

(2) $\underline{x}\ P_1 \underline{y}$, $\underline{x}\ P_2\ \underline{y}$, $\underline{y}\ P_3 \underline{x}$

(3) $\underline{y}\ P_1 \underline{z}$, $\underline{z}\ P_2\ \underline{y}$, $\underline{y}\ P_3 \underline{z}$

(4) $\underline{x}\ P_1 \underline{z}$, $\underline{z}\ P_2\ \underline{x}$, $\underline{z}\ P_3 \underline{x}$

En el caso (2) tenemos que, para el subconjunto formado por las preferencias de los individuos 2 y 3 la decisión debe ser $\underline{x}$ I $\underline{y}$ por las razones que ya hemos visto. Para el subconjunto que sólo contiene a la preferencia del individuo 1 la decisión social debe ser $\underline{x}$ P $\underline{y}$ por aplicación de la condición F –Pareto débil–. Dado que " $\underline{x}$ P $\underline{y}$" implica "$\underline{x}$ R $\underline{y}$", y que "$\underline{x}$ I $\underline{y}$." también implica "$\underline{x}$ R $\underline{y}$", en virtud de la condición H –Pareto generalizado– tenemos que para el caso (2) la decisión social será $\underline{x}$ R $\underline{y}$.

Un razonamiento similar nos lleva a la conclusión de que la decisión social es $\underline{y}$ R $\underline{z}$ en el caso (3) y $\underline{z}$ R $\underline{x}$, en el caso (4). En este último caso la partición que se toma es la formada por el subconjunto de las preferencias de 1 y 2 y el subconjunto que sólo contiene la de 3.

Ahora bien, de la decisión social en los casos (2) y (3) se sigue, por transitividad de R, "$\underline{x}$ R $\underline{z}$". En consecuencia, para el caso (4) tenemos "$\underline{x}$ R $\underline{z}$ & $\underline{z}$ R $\underline{x}$ lo que implica "$\underline{x}$ I $\underline{z}$.

Del mismo modo, de "y R z & z R x" se sigue para el caso (2) "y R x" por transitividad, y como ya teníamos "x R y", obtenemos "x I y".

De "z R x & x R y" se sigue para el caso (3) "z R y", y dado que teníamos "y R z "inferimos "y I z "

Esto parece indicar que la única regla compatible con las condiciones impuestas será una que haga que la sociedad sea indiferente siempre que las preferencias individuales no son unánimes. Esta es la llamada "regla de extensión de Pareto".

Sin embargo, la regla de extensión de Pareto tampoco puede satisfacer las condiciones, como se muestra a continuación:

(5) x P_1y, x P_2y, x P_3y

(6) y P_1z, y P_2z, z P_3y

(7) x P_1z, x P_2z, z P_3x

Para el caso (5) tenemos la decisión social "x P y" por la condición F. Para los casos (6) y (7) la regla de extensión de Pareto indica que la decisión debe ser "y I z" y "x I z" respectivamente. Pero de la decisión social para (5) y para (6) se infiere, por transitividad, que la decisión para el caso (7) es " x P z". Como se ve, hemos obtenido una contradicción, ya que en el caso (7) tenemos "x I z & x P z".

De este modo se demuestra que las condiciones dadas no pueden ser satisfechas por ninguna regla de elección social cuando se interpreta la condición D' como D. La estrategia a seguir consistirá en cambiar la interpretación de la condición D', es decir, admitir como información moralmente relevante no sólo las meras preferencias individuales.

Como se recordará, en el caso (1) nos vimos obligados a admitir que la decisión social es "x I y" porque resultaba imposible distinguir entre (1) y (1"), de modo que si la decisión no hubiera sido de indiferencia se habría obtenido una contradicción −si en (1) es "x P y" en (1") es "y P x" , y si en (1) es "y P x" en (1") es "x P y"−.

Para evitar el resultado de imposibilidad necesitamos que sea posible que en casos de preferencias opuestas, como el (1), la decisión social no deba ser siempre la indiferencia. Pero para ello es necesario poder distinguir entre los casos (1) y (1"), ya que de lo contrario incurriríamos irremediablemente en contradicción.

Para poder distinguir entre los casos (1) y (1"), los deberíamos concebir no simplemente como conjuntos de preferencias individuales, sino como conjuntos ordenados de tales preferencias. Entonces, la información moralmente relevante de D' se habrá de entender que incluye no sólo la información acerca de las preferencias individuales sino que tales preferencias aparecerán ordenadas de alguna manera

En otras palabras, lo que se necesita para evitar el resultado de imposibilidad es que en algunos casos de preferencias opuestas la sociedad pueda optar por una de ellas. Esto es tanto como decir que no se tendrá que otorgar siempre el mismo peso a todas las preferencias individuales, sino que en ciertas circunstancias algunas podrán tener prioridad sobre otras. Esto tiene cierto apoyo en las intuiciones morales corrientes, ya que parece razonable pensar que en ciertas circunstancias en que dos individuos tienen preferencias opuestas puede haber razones morales para inclinarse por una de ellas.

Consecuentemente con lo antedicho, interpretaremos la condición D' de la siguiente manera:

Condición D": Sean Ř(x, y) y Ř' (x, y) dos conjuntos ordenados de preferencias individuales con respecto a las alternativas x e y, y sean R(x, y) y R'(x, y) las decisiones sociales con respecto a las alternativas x e y que una determinada regla de elección social asigna respectivamente a los conjuntos ordenados Ř (x, y) y Ř'(x, y) Entonces,

Ř (x, y) = Ř' (x, y) → (R (x, y) ↔ R'(x, y))

Deberemos ver ahora cuáles son los criterios de asignación de prioridades compatibles con las condiciones dadas.

Supongamos que tenernos un procedimiento de elección social que toma en cuenta las preferencias individuales y sus respectivas prioridades. Parece obvio que una condición de adecuación que debería satisfacer la noción de "prioridad", ya que es la razón por la cual fue introducida, es la siguiente:

Condición I: Dada una sociedad formada por dos individuos, i, j, y un procedimiento de elección social,

$$x P_i y \ \& \ y P_j x \rightarrow (x P_i y > y P_j x \leftrightarrow x P y)$$

donde "$x P_i y > y P_j x$" significa que la preferencia de i en favor de x contra y tiene mayor prioridad que la preferencia de j en favor de y contra x, y "$x P y$" es la decisión social para la sociedad formada exclusivamente por esos dos individuos.

Dado un procedimiento de elección social consistente sobre $R(x,y)$, se puede demostrar que debe existir algún caso en el cual el individuo que tiene la preferencia de mayor prioridad es casi-decisivo, como veremos a continuación.

Arrow probó que debía haber una situación en la que un individuo fuera casi-decisivo. Para esta prueba sólo se requiere el principio de Pareto débil y las propiedades de completitud y transitividad de la relación "R". Por consiguiente, ese resultado también vale bajo las condiciones que tenemos ahora, ya que mantenemos las propiedades formales de "R" y la condición F.

Sea esa situación la siguiente:

(1) $x P_D y$, $y P_1 x$, $y P_2 x$, $\cdots$ $y P_{n-1} x$

donde la decisión social es $x P y$.

Si la preferencia de D no tiene la máxima prioridad, debe haber alguna preferencia individual $y P_i x \geq x P_D y$. Si esto es así, la decisión social para el subconjunto formado por estas dos preferencias debe ser "$y R x$," en virtud de la condición I. Dado que para el subconjunto formado por el resto de las preferencias individuales la decisión social debe ser "$y P x$" en virtud de la condición F, lo cual implica "$y R x$", la condición H indica que la decisión para el conjunto total ha de ser "$y R x$", contradiciendo la hipótesis.

Por consiguiente, el individuo casi-decisivo debe tener la máxima prioridad.

Se probará ahora que D continuará siendo casi-decisivo en todas las situaciones en que tenga la máxima prioridad.

En primer lugar se prueba que el individuo con la mayor prioridad es casi-decisivo en todos los casos en que las preferencias de los demás son iguales entre sí en prioridad.

Supongamos que la preferencia de D se opone a las n-1 instanciaciones de la preferencia de aquel individuo, de entre los n-1 del caso (1), que tiene la máxima prioridad de preferencia. Supondremos también que en este caso la decisión social es $y R x$. Sea el individuo 1 ese individuo, y representemos la situación así: (donde "$y P_{ij} x$" representa la J-sima instancia de la preferencia del individuo i del caso (1) y "~" significa "igual prioridad").

(2) $x P_D y > y P_{1,1} x \sim y P_{1,2} x \sim y P_{1,3} x \sim \cdots \sim y P_{1,\, n-1} x$

De ser en este caso $y R x$ la decisión social, deberemos tener la misma decisión en todos los casos en que a la preferencia de D (el individuo cuya preferencia tiene mayor prioridad) se oponen n-1 preferencias individuales de igual prioridad entre si –por condición D"–, como por ejemplo el siguiente:

(3) $x P_D y > y P_{2,1} x \sim y P_{2,2} x \sim y P_{2,3} x \sim \cdots \sim y P_{2,\, n-1} x$

Ahora bien, veamos el siguiente caso:

$$
\begin{array}{l}
(4)\ \underline{y}\ P_{1,1}\underline{x} \sim \underline{y}\ P_{1,2}\underline{x} \sim \underline{y}\ P_{1,3}\underline{x} \sim \cdots \sim \underline{y}\ P_{1,\ n-1}\underline{x} \\
\quad \underline{y}\ P_{2,1}\underline{x} \sim \underline{y}\ P_{3,2}\underline{x} \sim \underline{y}\ P_{3,3}\underline{x} \sim \cdots \sim \underline{y}\ P_{3,\ n-1}\underline{x} \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\quad \underline{y}\ P_{n-1}\underline{x} \sim \underline{y}\ P_{n-1,2}\underline{x} \sim \underline{y}\ P_{n-1,3}\underline{x} \sim \cdots \sim \underline{y}\ P_{n-1,\ n-1}\underline{x}
\end{array}
$$

Si agregamos a esta matriz la columna:

$$
\begin{array}{l}
\underline{x}\ P_D\underline{y} \\
\underline{x}\ P_D\underline{y} \\
\underline{x}\ P_D\underline{y} \\
\vdots \\
\underline{x}\ P_D\underline{y}
\end{array}
$$

inferimos, sobre la base del caso (2) y la condición D" que la preferencia social para cada fila es $\underline{y}$ R $\underline{x}$ Luego, por la condición H, será esa la decisión social para toda la matriz.

Si, en cambio, agregamos la fila

$$\underline{x}\ P_{\underline{D},\ 1}\underline{y} > \underline{x}\ P_{\underline{D},\ 2}\underline{y} \sim \underline{x}\ P_{\underline{D},3}\underline{y} \sim \bullet\bullet\bullet \sim \underline{x}\ P_{\underline{D},\ n-1}\underline{y}$$

vemos que cada columna de la matriz será igual al caso (1) y por ende la decisión social para cada columna será $\underline{x}$ P $\underline{y}$, y en consecuencia será esa la decisión social para toda la matriz en virtud de la condición H.

Dado que la preferencia social debe ser independiente de la manera en que representemos el vector que denota las $\underline{n}$-1 instancias de la preferencia de $\underline{D}$, la preferencia social en cada una de las dos representaciones debe ser idéntica. Por ello, como se ha demostrado cuál debe ser la preferencia social para el caso (1), ésta no puede ser $\underline{y}$ R $\underline{x}$ para el caso (2) porque se incurriría en contradicción. Luego, en razón de la completitud, la decisión social en (2) debe ser $\underline{x}$ P $\underline{y}$.

Ahora se demostrará que en aquellos casos en que no todos los individuos que prefieren $\underline{y}$ a $\underline{x}$ tienen la misma prioridad de preferencia, el individuo $\underline{D}$ sigue siendo casi-decisivo.

Llámese $\underline{C}$ al subconjunto de las preferencias individuales opuestas a $\underline{D}$ y supongamos que hay $\underline{L}$ niveles diferentes de prioridad dentro de $\underline{C}$ donde $1 \leq \underline{L} \leq \underline{n}-1$. La variable $\underline{1}$ representará cualquier nivel de prioridad dado. La letra $\underline{m}$ representa el número de individuos dentro de $\underline{C}$ cuyas preferencias tienen el nivel $\underline{1}$, y sea $\underline{m}_1 + m_2 + \bullet\bullet\bullet + m_L = \underline{n}-1$. Por "$\underline{y}\ P_{i,j}\underline{x}$" entenderemos la $\underline{j}$-sima preferencia individual de nivel de prioridad $\underline{i}$.

$$
(5)\qquad
\begin{array}{c}
\underline{x}\ P_{\underline{D}}\ \underline{y} \\
\vee \\
\underline{y}\ P_{1,1}\underline{x} \sim \underline{y}\ P_{1,\ 2}\underline{x} \sim \cdots \quad \sim \underline{y}\ P_{1,\ m1}\underline{x} \\
\vee \\
\underline{y}\ P_{2,1}\underline{x} \sim \underline{y}\ P_{2,\ 2}\underline{x} \sim \cdots \quad \sim \underline{y}\ P_{2,\ m2}\underline{x} \\
\vee \\
\vdots \\
\vee \\
y\ P_{\underline{L},1}\underline{x} \sim \underline{y}\ P_{L,2}\underline{x} \sim \cdots \sim \underline{y}\ P_{L,mL}\underline{x}
\end{array}
$$

Consideremos la situación donde tenemos $\underline{L}$ instancias de cada una de las preferencias individuales del caso (5). El subconjunto $\underline{C}$ resultante puede ser representado así:

$$
(6)\quad
\begin{array}{ccccc}
(\underline{y}\, P_{1,1}\underline{x} \cdots \underline{y}\, P_{1,m1}\underline{x})^{1,1} & \sim & (\underline{y}P_{1,1}\underline{x} \cdots \underline{y}P_{1,m1}\underline{x})^{1,2} & \sim \cdots & (\underline{y}P_{1,1}\underline{x} \cdots \underline{y}\, P_{1,m1}\underline{x})^{1,\underline{L}} \\
\vee & & \vee & & \vee \\
(\underline{y}\, P_{2,1}\underline{x} \cdots \underline{y}\, P_{2,m2}\underline{x})^{2,1} & \sim & (\underline{y}P_{2,1}\underline{x} \cdots \underline{y}P_{2,m2}\underline{x})^{2,2} & \sim \cdots & (\underline{y}P_{2,1}\underline{x} \cdots \underline{y}\, P_{2,m2}\underline{x})^{2,\underline{L}} \\
\vee & & \vee & & \vee \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vee & & \vee & & \vee \\
(\underline{y}P_{1,1}\underline{x} \cdots \underline{y}\, P_{1,\underline{m1}}\underline{x})^{\underline{1},1} & \sim & (\underline{y}P_{\underline{1},1}\underline{x} \cdots \underline{y}P_{\underline{1},\underline{m1}}\underline{x})^{\underline{1},2} & \sim \cdots & (\underline{y}P_{\underline{1},1}\underline{x} \cdots \underline{y}\, P_{\underline{1},\underline{m1}}\underline{x})^{1,\underline{L}} \\
\vee & & \vee & & \vee \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vee & & \vee & & \vee \\
(\underline{y}\, P_{\underline{L},1}\underline{x} \cdots \underline{y}\, P_{\underline{L},\underline{mL}}\underline{x})^{\underline{L},1} & \sim & (\underline{y}P_{\underline{L},1}\underline{x} \cdots \underline{y}\, P_{\underline{L},\underline{mL}}\underline{x})^{\underline{L},2} & \sim \cdots & (\underline{y}\, P_{\underline{L},1}\underline{x} \cdots \underline{y}\, P_{\underline{L},\underline{mL}}\underline{x})^{\underline{L},\underline{L}}
\end{array}
$$

Cada columna representa una instancia del subconjunto $\underline{C}$ en el caso (5), mientras que cada fila representa $\underline{L}$ instancias de las $\underline{m}$ preferencias individuales de nivel de prioridad 1.

si agregarnos la fila:

(7) $\underline{x}\, P_{\underline{D},1}\underline{y} \sim \underline{x}\, P_{\underline{D},\underline{2}}\underline{y} \sim \cdots \sim \underline{x}\, P_{\underline{D},1}\underline{y} \sim \cdots \sim \underline{x}\, P_{\underline{D},L}\underline{y}$

cada columna representará una instancia del caso (5). Supongamos que hay una interpretación del caso (5) para la cual la decisión social es "$\underline{y}$ R $\underline{x}$". Entonces, ésta deberá ser la decisión social para cada columna de la matriz (6) -agregándole la fila (7)-, y por la condición H deberá ser la decisión social para toda la matriz resultante de agregar a (6) la fila (7).

Si, en cambio, agregamos a (6) la columna

$$
(8)\quad
\begin{array}{c}
\underline{x}\, P_{1,\underline{D}}\underline{y} \\
\underline{x}\, P_{2,\underline{D}}\underline{y} \\
\vdots \\
\underline{x}\, P_{1,\underline{D}}\underline{y} \\
\vdots \\
\underline{x}\, P_{\underline{L},\underline{D}}\underline{y}
\end{array}
$$

en cada fila tendremos "$\underline{x}\, P_D\, \underline{y}$" y $\underline{L}_{\underline{m1}}$ preferencias individuales opuestas del mismo grado de prioridad. Ya se ha demostrado que, en esta situación, la preferencia de $\underline{D}$ es casi-decisiva en cada fila. En consecuencia, en cada fila tendremos que la decisión social es "$\underline{x}$ P $\underline{y}$". Luego, por la condición H, tal será la decisión social para toda la matriz resultante de agregar a (6) la columna (8).

Nuevamente observamos que la decisión social debe ser independiente de la manera en que representemos el vector que denota las $\underline{L}$ instancias de las preferencias

del individuo D. Por ende, la decisión social debería ser la misma cuando agregarnos a (6) la fila (7) que cuando le agregarnos la columna (8). Y dado que "x P y" no es consistente con "y R x", la suposición de que hay una interpretación del caso (5) en la que se obtiene "y R x" debe ser falsa, pues ya se ha establecido que la decisión es "x P y" cuando se oponen a "x P_D y".
preferencias iguales entre si en prioridad. Por ende, no puede haber una interpretación del caso (5) en la que el individuo D no sea casi-decisivo. De este modo se ha establecido que el individuo que tiene la máxima prioridad es casi-decisivo en todas las situaciones en que continúa teniendo la máxima prioridad.[5]

También se puede demostrar que el individuo que tiene la máxima prioridad continuará siendo decisivo cuando alguno de los otros cambia su preferencia. Con ello se muestra que el individuo cuya preferencia tiene máxima prioridad no sólo será casi-decisivo sino decisivo.

Con esto queda demostrado el siguiente

TEOREMA DE UNICIDAD: La única regla de elección social que puede satisfacer las condiciones impuestas es una regla que haga decisivo al individuo con la máxima prioridad.

[5] La demostración ha sido tomada de STRASNICK: “The problem…” pp. 265 y ss.

VI. NATURALEZA DE LA PRIORIDAD.

Queda por determinar la base para identificar en cada elección al individuo con mayor prioridad.

Para ello resulta indispensable algún tipo de comparación interpersonal, es decir, juicios del tipo "sería mejor (o igual o peor) ser el individuo $\underline{i}$ –con todas sus características psicológicas– en la situación $\underline{x}$ que ser el individuo $\underline{j}$ –con todas sus características psicológicas– en la situación $\underline{y}$". Estos son juicios de comparación interpersonal "ordinales".

Se supondrá que para cada individuo tenemos una función de utilidad sobre todas las alternativas. Esta función se puede hallar siempre para todo conjunto de preferencias de un individuo sobre un conjunto de alternativas. Para ello se asigna un número real a cada alternativa $\underline{x}$ con la siguiente condición: Para todo $\underline{x}$, $\underline{y}$, el número que se asigna a $\underline{x}$, –en adelante "$\underline{U_i}$ (x)"– es mayor que el número que se asigna a $\underline{y}$ –"$\underline{U_i}(\underline{y})$"–si y sólo si $\underline{x}\, P_i \underline{y}$.
Eso es una función de utilidad ordinal.

Las funciones de utilidad ordinales pueden ser objeto de transformaciones monótonas. Esto significa que si "$\underline{U}$ (x)" es una función de utilidad ordinal, "$\underline{F}(\underline{u})$" una función de incremento entre números reales y números reales, con $\underline{F}$ ($\underline{u}$) > $\underline{F}$ ($\underline{u}'$) siempre que $\underline{u}$ > $\underline{u}'$, y $\underline{V}$(x) = $\underline{F}$ $\underline{U}$($\underline{x}$), entonces "$\underline{V}$ ($\underline{x}$)" también es una función de utilidad ordinal.

De acuerdo con lo señalado, el uso de funciones de utilidad individuales es una manera alternativa de representar las preferencias individuales, ya que decir "$\underline{U_i}$ ($\underline{x}$) > $\underline{U_i}$ ($\underline{y}$)" equivale a decir "$\underline{x}\, P_i \underline{y}$".

Los enunciados que establecen comparaciones interpersonales, es decir, enunciados del tipo "es preferible ser el individuo $\underline{i}$ en la situación $\underline{x}$ a ser el individuo $\underline{j}$ en la situación $\underline{y}$" también pueden ser representados por una función de utilidad: "$\underline{U_i}(\underline{x})$> $\underline{U_j}(\underline{y})$". Estas funciones de utilidad también pueden ser objeto de transformaciones monótonas, *pero la transformación debe ser la misma para todos los individuos*. Se las suele llamar "funciones *co-ordinales"*.

Tomemos ahora una situación de dos personas en la que tenemos la siguiente matriz de preferencias individuales:

(1) $\underline{x}\, P_1 \underline{y}$ $\underline{y}\, P_2\, \underline{x}$
(2) $\underline{y}\, P_1 z$ $\underline{y}\, P_2\, \underline{z}$
(3) $\underline{x}\, P_1 z$ $\underline{z}\, P_2\, \underline{x}$

Para analizar esta situación supondremos que en (1) la decisión social es la indiferencia: "$\underline{x}$ I $\underline{y}$". En otras palabras, se supone que las preferencias de 1 y 2 tienen la misma prioridad en el caso (1).

En cuanto al caso (2), es obvio que la decisión social ha de ser "$\underline{y}$ P $\underline{z}$" en virtud de la condición F y en caso (3) será "$\underline{x}$ P $\underline{z}$" en razón de la transitividad.

Esto muestra que, bajo la suposición de que en el caso (1) las dos preferencias tienen la misma prioridad, en el caso (3) la preferencia de 1 debe tener mayor prioridad que la de 2. De lo que se trata es de encontrar una base o principio general del que se derive esta diferencia de prioridad.

Por otra parte, deseamos que ese principio haga depender las diferencias de prioridad entre preferencias exclusivamente de diferencias en las utilidades que obtienen los individuos de las distintas situaciones en juego.

Suponiendo, como dijimos, que para cada individuo tenemos una función de utilidad derivada de sus preferencias en los casos (1), (2) y (3), utilizaremos la notación "$\underline{x}_1$", "$\underline{y}_1$" y "$\underline{z}_1$" para representar las utilidades que el individuo 1 obtiene de los estados "$\underline{x}$", "$\underline{y}$" y "$\underline{z}$"; y "x_2", "y_2" y "z_2" para representar la utilidad que obtiene el individuo 2 de tales estados.

De las preferencias expresadas en los casos (1), (2) y (3) se deriva fácilmente:

$\underline{x}_1 > \underline{y}_1 > \underline{z}_1$

$\underline{y}_2 > \underline{z}_2 > \underline{x}_2$

Por otra parte, de la igualdad de prioridad de preferencias supuestas en el caso (1) y la diferencia de prioridad que se deriva en el caso (3) se infiere la siguiente diferencia de prioridad intrapersonal:

(i) o bien $\underline{x}\, P_1 \underline{z} > \underline{x}\, P_1 \underline{y}$

o bien $\underline{y}\, P_2 \underline{x} > \underline{z}\, P_2 \underline{x}$

Demostración:

Supongamos que (i) es falso. Entonces tendremos:

(ii) $\underline{x}\, P_1 \underline{y} \geq \underline{x}\, P_1 \underline{z}$ & $\underline{z}\, P_2 \underline{x} \geq \underline{y}\, P_2 \underline{x}$

(iii) $\underline{x}\, P_1 \underline{y} \geq \underline{x}\, P_1 \underline{z} > \underline{z}\, P_2 \underline{x} \geq \underline{y}\, P_2 \underline{x}$

(iv) $\underline{x}\, P_1 \underline{y} > \underline{y}\, P_2 \underline{x}$ por transitividad

Pero (iv) contradice la hipótesis de que las preferencias del caso (1) tienen igual prioridad.

A fin de que las diferencias de prioridad entre las preferencias de un mismo individuo deriven exclusivamente de diferencias en las utilidades que obtiene de los distintos estados alternativos se introduce una especie de condición de independencia:

Condición J: INDEPENDENCIA *INTRA*PERSONAL. Sean $\underline{S}$ y $\underline{S'}$ dos conjuntos de estados distributivos en el dominio de una función de decisión social. Para todos los estados $\underline{x}$, $\underline{y}$, ∈ $\underline{S}$ y $\underline{x}'$, $\underline{y}'$ ∈ $\underline{S'}$, y para todos los individuos $\underline{i}$, si $\underline{x}_i = \underline{x}'_i$ & $\underline{y}_i = y'_i$, entonces $\underline{x}\, P_i \underline{y} \sim \underline{x}'\, P_i \underline{y}'$-.

Debemos ahora formular el principio que nos permita explicar las diferencias de prioridades formuladas disyuntivamente en (i), el cual debe hacer derivar tales diferencias exclusivamente de diferencias en las utilidades que los individuos obtienen de los distintos estados, como requiere la condición J, y por otra parte debe ser compatible con las funciones de utilidad que se derivan de los casos (1) / (3).

Para ello necesitamos el siguiente:

PRINCIPIO DISYUNTIVO DE RESPONSIVIDAD: Sean $\underline{S}$ y $\underline{S'}$ dos conjuntos de alternativas en el dominio de una función de decisión social.O bien para todo $\underline{i}$ y para $\underline{x}$, $\underline{y}$, ∈ $\underline{S}$ y $\underline{x}'$, $\underline{y}'$ ∈ $\underline{S}'$ tales que $\underline{x}\, P_i \underline{y}$ & $\underline{x}'\, P_i y'$, si $\underline{x}'_i = \underline{x}_i$ & $\underline{y}_i > \underline{y}'_i$, entonces $x'\, P_i \underline{y}' > \underline{x}\, P_i \underline{y}$.

Por otra parte, a fin de que las diferencias de prioridad entre las preferencias de distintos individuos deriven de diferencias en las utilidades que los individuos obtienen de las alternativas en juego exclusivamente, introduciremos la siguiente condición de independencia:

Condición K: INDEPENDENCIA *INTER*PERSONAL: Para todo $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{i}$, $\underline{j}$, tales $\underline{x}\, P_i \underline{y}$ & $\underline{y}\, P_j \underline{x}$, si $\underline{x}_i = \underline{y}_j$ & $\underline{y}_i = x_j$, entonces $\underline{x}\, P_i \underline{y} \sim \underline{y}\, P_j \underline{x}$.

De esta condición se puede derivar, dadas la condición F y la transitividad, el siguiente:

PRINCIPIO DE RESPONSIVIDAD INTERPERSONAL: Para todo $\underline{x}$, $\underline{y}$, y $\underline{i}$, $\underline{j}$, tales $\underline{x}\, P_i \underline{y}$ & $\underline{y}\, P_j \underline{x}$, si $\underline{x}_i > \underline{y}_j$ & $\underline{x}_j > \underline{y}_i$, entonces $\underline{x}\, P_j \underline{y} > \underline{y}\, P_j \underline{x}$.

Demostración

Supongamos que tenemos las siguientes preferencias individuales con respecto a las alternativas $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$,:

(i) $\underline{x}\ P_1\underline{y}\quad \underline{y}\ P_2\underline{x}$
(ii) $\underline{z}\ P_1\underline{y}\quad \underline{z}\ P_2\underline{y}$
(iii) $\underline{x}\ P_1\underline{z}\quad \underline{z}\ P_2\underline{x}$

donde supondremos también que son verdaderas las siguientes comparaciones de utilidad interpersonales:

(iv) $\underline{x}_1 > \underline{y}_2, \underline{x}_2 > \underline{y}_1$
(v) $\underline{x}_1 = \underline{z}_2, \underline{x}_2 > \underline{z}_1$

Sea la decisión social en el caso (i) y R $\underline{x}$. Para el caso (ii) el principio de Pareto (condición F) nos dice que la decisión social será $\underline{z}$ P $\underline{y}$. Por consiguiente, la decisión social en el caso (iii) será $\underline{z}$ P $\underline{x}$ en virtud de la transitividad. Pero esto último contradice la condición K, atento el supuesto (v). Por ende la decisión social en (i) no puede ser "$\underline{y}$ R $\underline{x}$", por lo cual deberá ser "$\underline{x}$ P $\underline{y}$".

Ahora estamos en condiciones de explicar la diferencia de prioridad observada anteriormente en el caso (3). Si suponemos que en el caso (1) la igualdad de prioridad entre las preferencias de 1 y 2, que tenemos por hipótesis, se debe a

$\underline{x}_1 = \underline{y}_2\ \&\ \underline{y}_1 = \underline{x}_2$

podemos derivar para el caso (3)

$\underline{x}_1 = \underline{z}_2\ \&\ \underline{x}_2 > \underline{z}_1$

Con ello, el principio de responsividad interpersonal explica que la preferencia de 1 tenga mayor prioridad que la de 2.

Probaremos ahora el siguiente

LEMA 2: Dadas las condiciones sobre la regla de decisión social y sobre la noción de prioridad de preferencia, si existe una situación en la que $\underline{y}_j \geq \underline{x}_i\ \&\ \underline{x}_j > \underline{y}_i\ \&\ \underline{x}\ P_i\underline{y} > \underline{y}\ P_j\underline{x}$, entonces para toda situación distributiva y para todo $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{x}\ P_i\underline{y} > \underline{y}\ P_j\underline{x}$, si y sólo si $\underline{y}_i > \underline{x}_j$.

Demostración:

No ofreceremos aquí la demostración completa de este lema, sino sólo algunos aspectos, dejando a cargo del lector la prueba de los restantes.

Por el principio de responsividad interpersonal sabemos:

(i) $(\underline{x}_i > \underline{y}_j\ \&\ \underline{y}_i < \underline{x}_j) \rightarrow (\underline{x}\ P_i\underline{y} > \underline{y}\ P_j\underline{x})$

Pero la conversa,

(ii) $(\underline{x}\ P_i\underline{y} > \underline{y}\ P_j\underline{x}) \rightarrow (\underline{x}_i > \underline{y}_j\ \&\ \underline{y}_i < \underline{x}_j)$

no es válida.

Los casos que falsifican (ii) son:

(iii) $\underline{x}\ P_i\underline{y} > \underline{y}\ P_j\underline{x}\ \&\ \underline{y}_j \geq \underline{x}_i\ \&\ \underline{y}_i \geq \underline{x}_j$
(¡v) $\underline{x}\ P_i\underline{y} > \underline{y}\ P_j\underline{x}\ \&\ \underline{x}_j \geq \underline{y}_i\ \&\ \underline{y}_i \geq \underline{x}_j$
(¡v) $\underline{x}\ P_i\underline{y} > \underline{y}\ P_j\underline{x}\ \&\ \underline{y}_j \geq \underline{x}_i\ \&\ \underline{x}_j \geq \underline{y}_i$

Se puede demostrar, sin embargo, que el caso (iii) es imposible. Quedan, pues, los casos (iv) y (v).

La cuestión es si puede existir una teoría de prioridad compatible con las condiciones impuestas que permita tanto el caso (¡v) como el caso (v).

Supongamos que sí. En ese caso, la regla de decisión social debe estar definida para el siguiente tipo de situación:

Sea el individuo 1 decisivo en favor de $\underline{x}$ contra $\underline{y}$, de modo que para todo $\underline{i}$ distinto de 1, $\underline{y}\ P_i\underline{x}\ \&\ \underline{x}\ P_1\underline{y} > \underline{y}\ P_i\underline{x}$ de modo que la preferencia social es $\underline{x}$ P y.

Sea $\underline{x}_2 = \underline{x}_4 = \underline{x}_6 = \cdots\ \&\ \underline{y}_2 = \underline{y}_4 = \underline{y}_6 = \cdots$
$\underline{X}_3 = \underline{x}_5 = \underline{x}_7 = \cdots\ \&\ \underline{y}_3 = \underline{y}_5 = \underline{y}_7 = \cdots$

Supongamos que el individuo 1 está con respecto a todos los individuos numerados con números pares en la situación permitida por (iv) y con respecto a todos los numerados por números impares en la situación permitida por (v). Por ende, tenemos:

(iv') $x_1 > y_2 = y_4 = y_6 = \bullet\bullet\bullet\ y_1 \geq x_2 = x_4 = x_6 = \bullet\bullet\bullet$

(v') $y_3 > y_5 = y_7 = \bullet\bullet\bullet \geq x_1\ \ x_3 = x_5 = x_7 = \bullet\bullet\bullet > y_1$

La siguiente matriz representa las utilidades individuales:

$i=$ 1	2	3	•••	$n-1$	n
x: x_1	x_2	x_3	•••	x_n-1	x_n
y: y_1	y_2	y_3	•••	y_{n-1}	y_n

Utilizaremos ahora la *propiedad de permutación*, en virtud de la cual la preferencia social entre cualquier par de alternativas debe permanecer inalterada cuando las utilidades de una de estas alternativas se reasignan entre los individuos involucrados. No demostraremos aquí esta propiedad, sino que la supondremos válida. Baste decir que parece reflejar una exigencia de imparcialidad en el trato de los individuos involucrados del mismo modo que la condición de anonimidad.

Dado que, por hipótesis, la decisión social en el caso que nos ocupa ha de ser x P y, aplicando la propiedad de permutación tenemos que la misma decisión deberemos tener en el siguiente:

$i =$ a	b_1	c_1	b_2	c_2	•••	$b_{\frac{n-1}{2}}$	$c_{\frac{n-1}{2}}$
x: x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	•••	x_{n-1}	x_n
y: y_1	y_3	y_2	y_5	y_4	•••	y_n	y_{n-1}

Veamos cuáles serían las preferencias sociales en los siguientes conjuntos: C_1 = individuos a y b_1.

$y_3 \geq x_1$ & $y_1 \geq x_2$. Se puede probar que $y\ P_{b1}\ x \geq x\ P_a y$. En consecuencia, la decisión social será y R x.

C_2 = individuos b_2 y todos los c_j.

Dado que $y_{b2} > x_{c1}$ & $y_{ci} > x_{b2}$, el principio de responsividad interpersonal implica que para todo c_i, si $x\ P_{ci}\ y$ entonces

$y\ P_{b2} x > x\ P_{ci}\ y$. Dado que $y\ P_{b2}\ x > x\ P_{c1} y \sim x\ P_{c2} y \sim x\ P_{c3} y$ ••• $\sim x\ \ P_{cn}\ \ y$, la preferencia social será y P x. Si $y R_{ci}\ x$, la preferencia social será y R x por condición F.

C_3 = todos los b_i distintos de b_1 o b_2.

Dado que para todo b_i, $y\ P_{bi} x$, la unanimidad implicará que la preferencia social es y P x (condición F).

Atento que la preferencia social para los tres conjuntos será respectivamente: "y R x", "y P x" o "y R x" y "y P x" , en virtud de la condición H la decisión para todo el conjunto será "y R x". Esto contradice la hipótesis.

Por ende, la suposición de que (iv) y (v) pueden coexistir dentro de una teoría de prioridad es falsa. La conclusión puede fácilmente generalizarse para cualquier número de votantes.

Como consecuencia, uno de los dos casos debe ser excluido.

Pero excluir el caso (v) resulta demasiado drástico desde el punto de vista ético, ya que importaría afirmar que en ninguna circunstancia el individuo que tiene más que perder, en caso de que no triunfe la alternativa que él prefiere, puede ser decisivo; ni aun en aquellos casos en que son iguales las utilidades obtenidas por los individuos de las alternativas que prefieren. Es decir que habría que sostener que, ni aun en el caso en que todos tienen lo mismo que ganar en el caso de que triunfe la alternativa que prefieren, puede resultar decisivo el individuo que quedaría en peor situación en caso de que triunfe la alternativa que él no prefiere.

Si, en cambio, se acepta la siguiente:

***Condición* L**: EXISTENCIA. Hay al menos una situación en la que $\underline{y}_i \geq \underline{x}_i$ & $\underline{x}_i > \underline{y}_i$ & $\underline{x}\ P_i \underline{y} > \underline{y}\ P_i \underline{x}$.

quedará excluida la situación (iv).

Con esto queda demostrado:

(vi) $\underline{x}\ P_i \underline{y} > \underline{y}\ P_j \underline{x} \rightarrow \underline{y}_i < \underline{x}_j$

Queda por demostrar:

(vii) $\underline{y}_i < \underline{x}_j \rightarrow \underline{x}\ P_j\ \underline{y}_i > \underline{y}\ P_j \underline{x}$

Si (vii) fuera falso, habría un caso donde

(viii) $\underline{y}_i < \underline{x}_j$ & $\underline{y}\ P_i \underline{x} \geq \underline{x}\ P_j \underline{y}$

Sin embargo "$\underline{y}\ P_j \underline{x} > \underline{x}\ P_i \underline{y}$" implicaría "$\underline{y}_i > \underline{x}_j$" en virtud de (vi)

Por ende, la situación tendría que ser:

(ix) $\underline{y}\ P_2 \underline{x} \sim \underline{x}\ P_1 \underline{y}$ & $\underline{y}_1 < \underline{x}_2$

Supongamos que se dan las siguientes preferencias:

(x) $\underline{x}\ P_2 \underline{z}$ $\underline{x}\ P_1 \underline{z}$

(xi) $\underline{y}\ P_2 \underline{z}$ $\underline{z}\ P_1 \underline{y}$

donde $z_2 \geq \underline{y}_1$.

Para el caso (ix) la decisión debe ser "y I $\underline{x}$". Para el caso (x) será "$\underline{x}$ P $\underline{z}$" en virtud de la condición F. Para (xi) será "$\underline{y}$ P $\underline{z}$" por transitividad. Pero esto implica "$\underline{y}\ P_2 \underline{z} > \underline{z}\ P_1 \underline{y}$", lo que a su vez implica "$\underline{y}_1 > \underline{z}_2$", contrario a la hipótesis.

Si se acepta la condición L, ésta junto con el lema 2 nos permiten afirmar el siguiente

TEOREMA: La única regla de elección social compatible con las condiciones impuestas será aquélla que prefiere en cada elección la alternativa favorecida por el individuo que quedaría en peor situación si su preferencia no fuera satisfecha.

Parte del interés de este teorema reside en que es estructuralmente análogo al principio de diferencia de Rawls.

***